Barem de notare și evaluare
Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Neamț
03.02.2024
Clasa a VII -a

Subiectul 1

a) Arătați că numărul $\sqrt{3\cdot 2023^{2024}+2024^{2023}}$ este irațional.
b) Arătați că suma $2024^1+2024^2+\cdots+2024^{2023}$ se divide cu 2023.

Soluție:

a)U(2023^{2024}) = U(3^{2024}) = U(3^4) = 1 $\Rightarrow$ U($3\cdot 2023^{2024}$) = 3 ....1 punct

U(2024^{2023}) = U(4^{2023}) = U(4^1) = 4 .... 1 punct

$\Longrightarrow$ U($3\cdot 2023^{2024}$+ 2024^{2023}) = 7 $\Longrightarrow$ $3\cdot 2023^{2024}$+ 2024^{2023} nu este pătrat perfect și deci $\sqrt{3\cdot 2023^{2024}+2024^{2023}}$ este irațional. ....1 punct

b)Deoarece $2024^k=(2023+1)^k=M_{2023}+1$, oricare ar fi $k\in\mathbb{N}^*$ ....2 puncte

rezultă că $2024^1+2024^2+\cdots+2024^{2023}$ = $\underbrace{M_{2023}+1+\cdots+\ M_{2023}+1}_{de\ 2023\ ori}$ =

= $M_{2023}+2023$ = M_{2023}. ....2 puncte

Subiectul 2

a)Se consideră numerele raționale nenule x, y, z și t. Știind că $\frac{1}{x+y+z+t}=\frac{2}{y+z+t}=\frac{3}{z+t+x}=\frac{4}{t+x+y}$, să se arate că $x\cdot y\cdot z\cdot t<0$.

Fie numărul $x=1+\sqrt{5}+\sqrt{5^2}+\sqrt{5^3}+\ldots+\sqrt{5^{2024}}$. Să se arate că $x\cdot\sqrt{5}+1=x+5^{1012}\cdot\sqrt{5}$.

Soluție:

a) $\frac{x+y+z+t}{1}=\frac{y+z+t}{2}=\frac{z+t+x}{3}=\frac{t+x+y}{4}\overset{not}{=}k, k\in\mathbb{Q}^*$ 1p

$x+y+z+t=k,\ y+z+t=2\cdot k,\ z+t+x=3\cdot k,\ t+x+y=4\cdot k$ 1p

$x=-k, y=-2\cdot k,\ z=-3\cdot k,\ t=7\cdot k$ 1p

$x\cdot y\cdot z\cdot t=-42\cdot k^4<0$ 1p

b)Calculează $x\cdot\sqrt{5}=\sqrt{5}+\sqrt{5^2}+\sqrt{5^3}+\ldots+\sqrt{5^{2025}}$..1p

$x\sqrt{5}+1=\underbrace{1+\sqrt{5}+\sqrt{5^2}+\sqrt{5^3}+\ldots+\sqrt{5^{2024}}}_{x}+\sqrt{5^{2025}}=x+\sqrt{5^{2025}}$ 1p

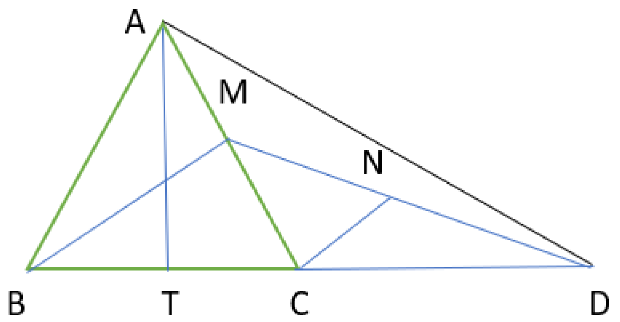
$x\cdot\sqrt{5}+1=x+5^{1012}\cdot\sqrt{5}$ 1p

Subiectul 3

Fie ABC un triunghi echilateral și D simetricul lui B față de C. Notăm cu M mijlocul segmentului AC și cu N mijlocul segmentului DM. Arătați că AD = 4CN.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Neamţ
Piatra Neamţ, jud. Neamţ, str. Lt. Drăghiescu, Nr. 4A
tel. 0233/214860, fax 0233/215807, e-mail: office@isjneamt.ro

Soluție:



Construim mediana BM corespunzătoare laturii BC în triunghiul ABC și observăm că NC linie mijlocie în triunghiul BMD, deci MB = 2CN .... 2 puncte

Triunghiul ABD dreptunghic, ADB = 30^{o} . ... 2 puncte

Construim AT $\perp$ BC și obținem că AD = 2AT .... 2 puncte

Obținem că AD = 2AT= 2BM = 4CN. .... 1 punct

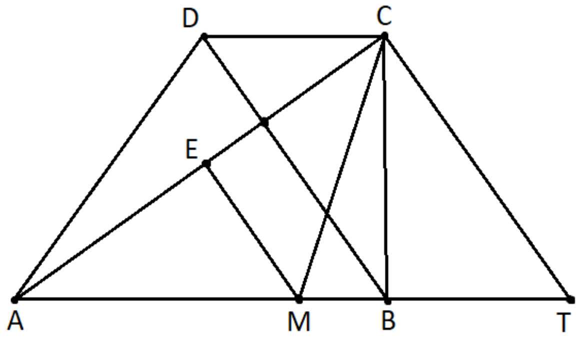
Subiectul 4

Se consideră trapezul ABCD cu $AB \parallel CD, AB > CD$ și $AC \perp BD$. Fie E mijlocul diagonalei AC. Paralela prin E la BD intersectează pe AB în M. Să se arate că:

a)$\triangle AMC$ este isoscel.

b)$ME = \frac{BD}{2}$ și $CM = \frac{AB+CD}{2}$.

Soluție:



a)Observă că în $\triangle AMC$, ME este înălțime și mediană, deci $\triangle AMC$ va fi isoscel cu $[AM] \equiv [MC]$..2p

b)Ducem $CT \parallel BD, T \in (AB$ vom avea EM linie mijlocie în $\triangle ACT \Rightarrow EM = \frac{CT}{2}$.
....2p

Observă că BTCD este paralelogram $\Rightarrow [CT] \equiv [BD] \quad \Rightarrow EM = \frac{BD}{2}$ 1p

Tot din BCTD paralelogram ⇒ $[DC] \equiv [BT] \quad \Rightarrow AT = AB + DC$......................1p

Cum $\triangle ACT$ este dreptunghic și CM mediană $\Rightarrow CM = \frac{AT}{2} = \frac{AB+DC}{2}$.
....1p